(Version: 2019/11/21)

辺及び一点にベキ型特異性を持つ 2 変数関数の二重積分

柏木 雅英

1 はじめに

長方形領域で定義され、辺にベキ型の特異性を持つ関数の精度保証付き二重積分について述べる。また、それを応用して、ある一点にベキ型の特異性を持つ関数の精度保証付き二重積分を行う方法を示す。

2 特異性を持たない関数の二重積分

以降の説明のため、まず特異性を持たない関数の二重積分の方法を述べる。

ベキ級数演算を二重に重ねることによって 2 変数関数の多項式による包含を得ることができ、それを利用すると二重積分の精度保証が可能になる。

通常のベキ級数演算は

$$x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n$$

のように区間を係数とする t に関する多項式同士の演算である。これに対して、

$$\begin{aligned}
&(x_{00} + x_{01}s + x_{02}s^2 + \cdots + x_{0n}s^n) \\
&+(x_{10} + x_{11}s + x_{12}s^2 + \cdots + x_{1n}s^n)t \\
&+(x_{20} + x_{21}s + x_{22}s^2 + \cdots + x_{2n}s^n)t^2 \\
&+\vdots \\
&+(x_{n0} + x_{n1}s + x_{n2}s^2 + \cdots + x_{nn}s^n)t^n
\end{aligned}$$

のように「s のベキ級数を係数として持つような t のべき級数」を考え、これに対して演算を行なう二重ベキ級数演算を考える。

複雑なように見えるが、例えば C++のテンプレート機能を用いて「係数の型を自由にすげかえれらる」やり方でベキ級数演算を実装しているならば、二重ベキ級数演算は容易に実装可能である。すなわち、例えば `psa<type>`が `type` 型を係数とするベキ級数演算を行なうための型だとすると、1 変数のベキ級数演算は `psa<interval>`で行なうところを、`psa<psa<interval>>`を使えば二重ベキ級数演算が実現できる。

さて、これを用いて、

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

を精度保証付きで計算する方法を示す。

(1) $m_1 \in [a,b]$、$m_2 \in [c,d]$ を選び (典型的にはそれぞれの中点)、元の問題を平行移動する。

$$I = \int_{c-m_2}^{d-m_2} \int_{a-m_1}^{b-m_1} f(m_1 + x, m_2 + y)dxdy$$

(2) 二重ベキ級数 x, y を

$$x(t,s) = (0+0s) + (1+0s)t$$
$$y(t,s) = (0+1s) + (0+0s)t$$

のように初期化する。

(3) 二重べき級数

$$p_1(t,s) = f(m_1 + x(t,s), m_2 + y(t,s))$$

を、t に関する定義域を $[a-m_1, b-m_2]$、s に関する定義域を $[c-m_2, d-m_2]$ として適当に選んだ次数 n で Type-II PSA で計算する。

(4) $p_1(t,s)$ を t に関して不定積分したものを $p_2(t,s)$ とする。

$$p_2(t,s) = \int_0^t p_1(t,s)dt$$

(5)

$$p_3(s) = p_2(b-m_1, s) - p_2(a-m_1, s)$$

を計算する。

(6) $p_3(s)$ を s に関して不定積分したものを $p_4(s)$ とする。

$$p_4(s) = \int_0^s p_3(s)ds$$

(7) 最終的な積分値は、

$$I = p_4(d-m_2) - p_4(c-m_2)$$

で求まる。

以下、実例を示す。ただし、区間の部分は短い桁数で外側に丸めたものを表示している。

$$I = \int_3^5 \int_3^5 \frac{1}{x^2+y^2} dxdy$$

を計算する。

(1) $m_1 = 4$、$m_2 = 4$ とし、元の問題を平行移動する。

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(4+x)^2+(4+y)^2} dxdy$$

(2) 二重ベキ級数 $x(t,s), y(t,s)$ を

$$\begin{aligned} x(t,s) &= t \\ y(t,s) &= s \end{aligned}$$

のように初期化する。

(3) 二重べき級数の次数を $n = 2$ とし、

$$p_1(t,s) = \frac{1}{(4+x)^2 + (4+y)^2}$$

を、t に関する定義域を $[-1,1]$、s に関する定義域を $[-1,1]$ として Type-II PSA で計算する。以下は途中経過。

- $4+x : 4+t$、 $4+y : 4+s$ 。
- $(4+x)^2 : 16+8t+t^2$、 $(4+y)^2 : 16+8s+s^2$ 。
- $(4+x)^2 + (4+y)^2 : (32+8s+s^2) + (8+0s+0s^2)t + (1+0s+0s^2)t^2$
- $\frac{1}{(4+x)^2+(4+y)^2}$:

$$\begin{aligned}
&(0.03125 && -0.0078125s && +[-0.0003, 0.006]s^2 &&) \\
&+(-0.0078125 && +0.0039625s && +[-0.005, 0.0007]s^2 &&)t \\
&+([-0.0003, 0.006] && +[-0.007, 9\times 10^{-5}]s && +[-0.03, 0.05]s^2 &&)t^2
\end{aligned}$$

(4) $p_1(t,s)$ を t に関して不定積分したものを $p_2(t,s)$ とする。

$$\begin{aligned}
&p_2(t,s) = (0) \\
&+(0.03125 && -0.0078125s && +[-0.0003, -0.006]s^2 &&)t \\
&+(-0.00390625 && +0.001953125s && +[-0.003, 0.0004]s^2 &&)t^2 \\
&+([-0.0001, 0.002] && +[-0.003, 3\times 10^{-5}]s && +[-0.009, 0.02]s^2 &&)t^3
\end{aligned}$$

(5)

$$p_3(s) = p_2(1,s) - p_2(-1,s)$$

を計算する。

$$p_3(s) = [0.062, 0.067] + [-0.020, -0.015]s + [-0.021, 0.042]s^2$$

(6) $p_3(s)$ を s に関して不定積分したものを $p_4(s)$ とする。

$$p_4(s) = 0 + [0.062, 0.067]s + [-0.0100, -0.0077]s^2 + [-0.0069, 0.014]s^3$$

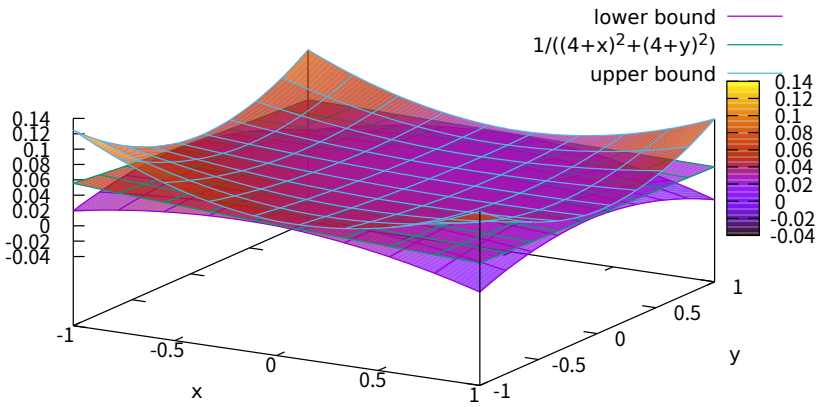
(7) 最終的な積分値は、

$$I = p_4(1) - p_4(-1)$$

で求まる。

$$[0.108, 0.163]$$

途中の過程 (3) で得られた区間多項式と与式の関係を図示すると、次のようになる。



区間多項式は全ての点 (x, y) において (平行移動された) 与式を包含しており、与式の積分を (簡単に積分できる) 区間多項式の積分に帰着させている。

3　辺に特異性を持つ関数の二重積分

p を整数でない実数とし、

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)^p g(x,y)dydx$$

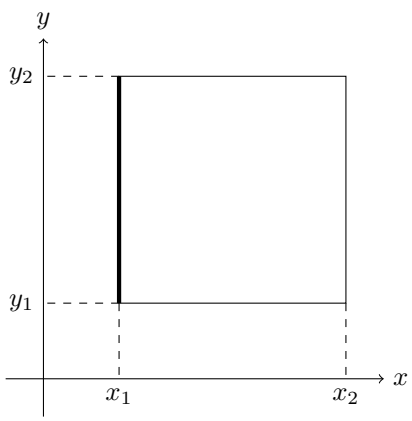
のような積分を考える。ただし、

$$f|_{x=x_1} = 0$$

とし、また自然数 n_x を 0 の多重度 (Multiplicity) とする。すなわち、

$$\left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{x=x_1} = 0 \quad (n < n_x)$$
$$\left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{x=x_1} \neq 0 \quad (n = n_x)$$

を満たすとする。



ここで、

$$f(x,y)^p g(x,y) = (x-x_1)^{pn_x}\left(\frac{f(x,y)}{(x-x_1)^{n_x}}\right)^p g(x,y)$$

と変形する。展開の中心として、x については x_1、y については区間内の任意の点 $y_m \in [y_1, y_2]$ (一般的には区間の中心) を用い、f 及び g を (x_1, y_m) を中心とした二重ベキ級数に展開する。ここで、

$$\frac{f(x,y)}{(x-x_1)^{n_x}}$$

の分子は $x = x_1$ で多重度 n_x で 0 となっており、分母で割る「約分」を行うことが出来る。こうすれば、

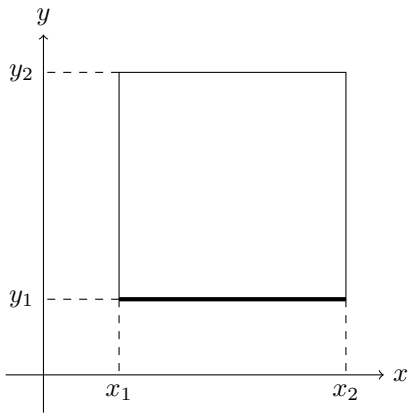
$$\left(\frac{f(x,y)}{(x-x_1)^{n_x}}\right)^p g(x,y)$$

の部分は特異点をもたないので普通に二重ベキ級数演算で計算が可能。

$$f(x,y)^p g(x,y) = (x-x_1)^{pn_x}\left(\frac{f(x,y)}{(x-x_1)^{n_x}}\right)^p g(x,y)$$

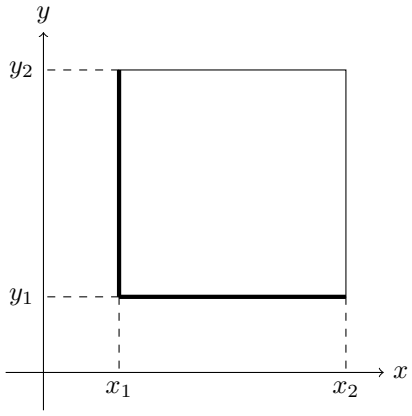
は、その計算結果に $(x-x_1)^{pn_x}$ を乗じた x に関して非整数なベキを持つ二重級数となり、その積分は機械的に計算できる。

y_1 について特異な場合、すなわち



のような辺で特異な場合も同様。展開の中心は (任意, y_1) 。

x_1, y_1 両方について特異な場合、すなわち、



の 2 辺で特異な場合もほぼ同様。展開の中心は (x_1, y_1) 。

例えば、次のような関数の積分が出来る。

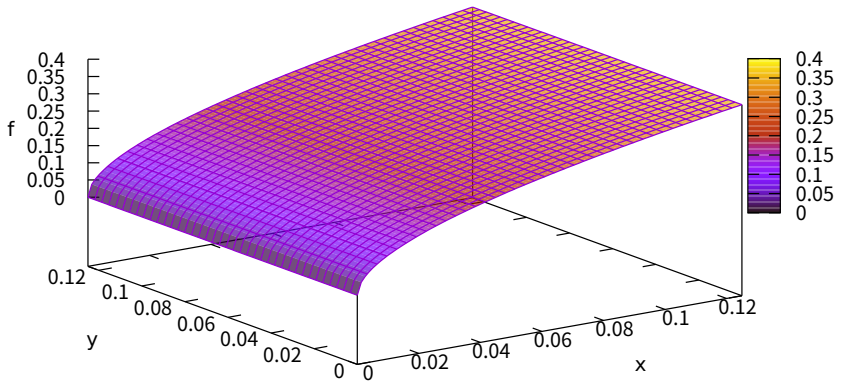
例 3.1.

$$\int_0^{0.125}\int_0^{0.125}\sqrt{x\cos y}\cos(xy)dxdy \in [0.0036779864914043189, 0.003677986491404342]$$

これは、辺 $x=0$ について特異な場合で、

$$(x\cos y)|_{x=0} = 0$$
$$\left.\frac{\partial(x\cos y)}{\partial x}\right|_{x=0} \neq 0$$

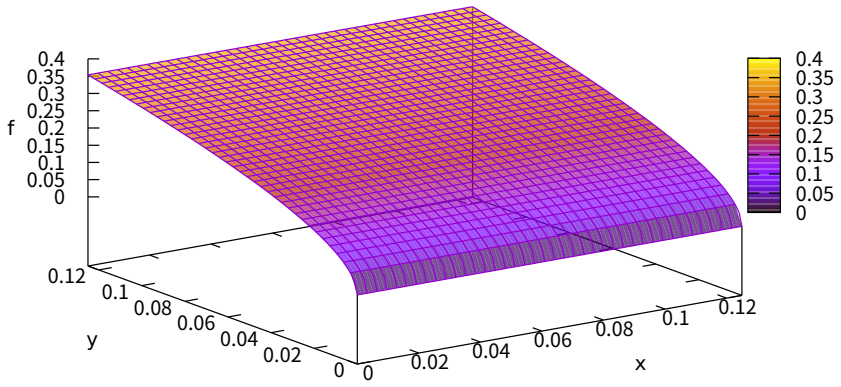
なので多重度 $n_x = 1$ である。



例 3.2.

$$\int_0^{0.125}\int_0^{0.125}\sqrt{(\cos x)y}\cos(xy)dxdy \in [0.0036779864914043176, 0.0036779864914043438]$$

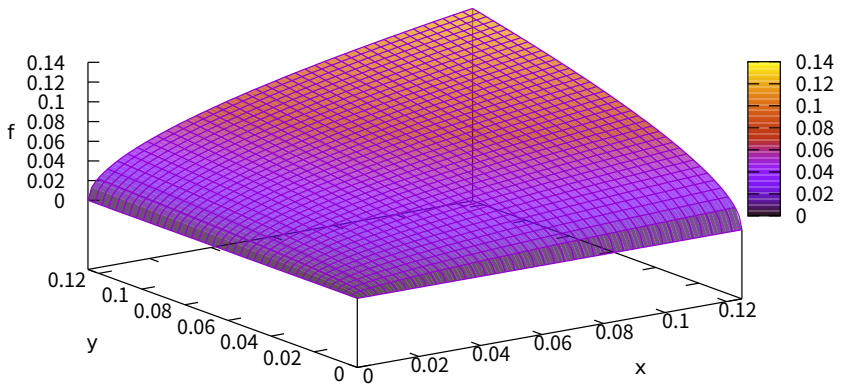
これは、辺 $y=0$ について特異な場合で、同様に y に関する多重度 $n_y = 1$。



例 3.3.

$$\int_0^{0.125}\int_0^{0.125}\sqrt{xy}\cos(xy)dxdy \in [0.00086803609297475211, 0.00086803609297475852]$$

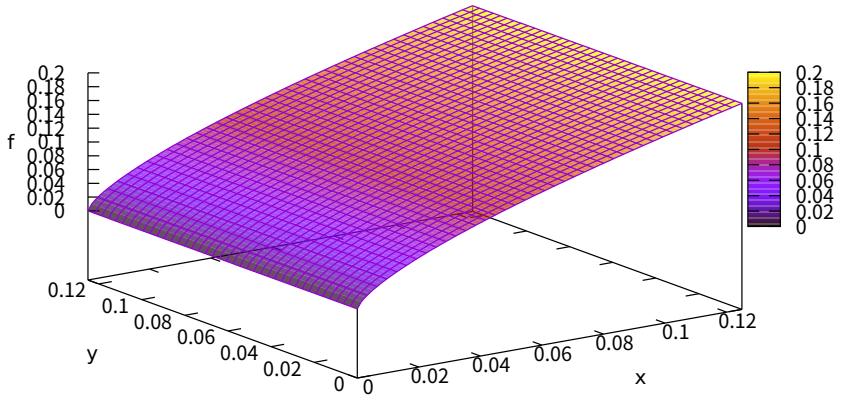
これは、辺 $x=0$, $y=0$ の両方について特異な場合で、x に関する多重度 $n_x=1$、y に関する多重度 $n_y=1$。



例 3.4.

$$\int_0^{0.125}\int_0^{0.125}((1-\cos x)\cos y)^{\frac{1}{3}}\cos(xy)dxdy \in [0.00086803609297475211, 0.00086803609297475852]$$

これは、辺 $x=0$ について特異で、x に関する多重度 $n_x=2$。



4　一点に特異性を持つ関数の二重積分

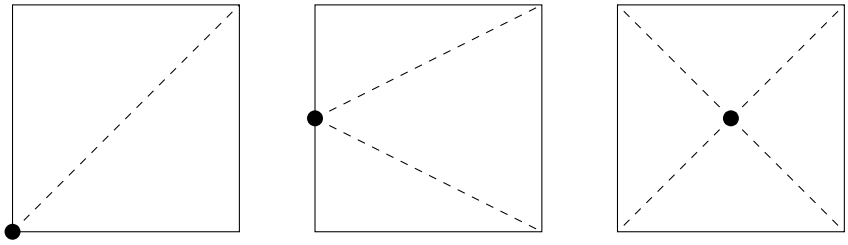
二重ベキ級数と約分処理によって、辺にベキ型の特異性を持つような数値積分の精度保証が可能となる。しかし、一点で特異となるような積分はこれでは難しい。

例えば、

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)^{0.25}\cos(xy)dydx$$

のような計算がしたい。

このような問題に対して、まず、「頂点の一つが特異点となるような三角形」の積分の形に問題を分割する。例えば、



のようにする。

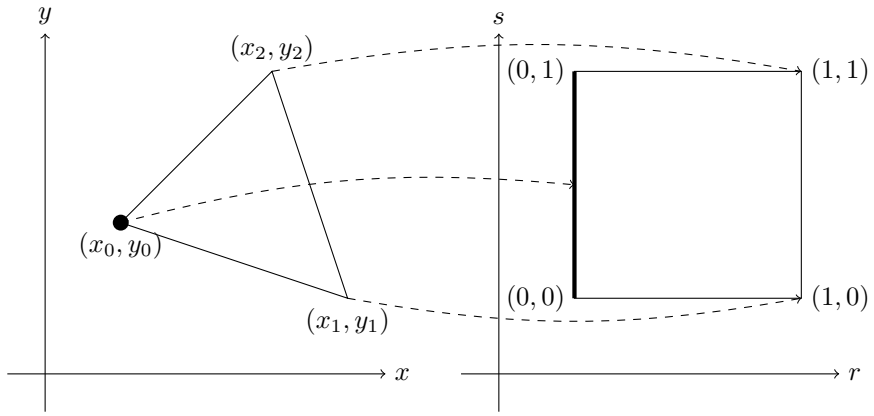
K を点 (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) を頂点とする三角形とし、

$$\iint_K f(x,y)^p g(x,y)dxdy$$

を計算する問題を考える。但し、$f(x_0,y_0)=0$ とする。

ここで、次のような変数変換で、特異点である点 (x_0,y_0) を辺に「開いて」、四角形上の積分に置き換える。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} rs$$
$$(0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1)$$



この変数変換を用いると、

$$\begin{aligned}
&\iint_K f(x,y)^p g(x,y) dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 f(x_0 + (x_1 - x_0)r + (x_2 - x_1)rs, y_0 + (y_1 - y_0)r + (y_2 - y_1)rs)^p \\
&g(x_0 + (x_1 - x_0)r + (x_2 - x_1)rs, y_0 + (y_1 - y_0)r + (y_2 - y_1)rs) \\
&\begin{vmatrix} (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1)s & (x_2 - x_1)r \\ (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1)s & (y_2 - y_1)r \end{vmatrix} dr\, ds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 f(x_0 + (x_1 - x_0)r + (x_2 - x_1)rs, y_0 + (y_1 - y_0)r + (y_2 - y_1)rs)^p \\
&g(x_0 + (x_1 - x_0)r + (x_2 - x_1)rs, y_0 + (y_1 - y_0)r + (y_2 - y_1)rs) \\
&\Big|(x_1 - x_0)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_1 - y_0)\Big| r\, dr\, ds
\end{aligned}$$

f にこの r, s を代入した、

$$\tilde{f}(r,s) = f(x_0 + (x_1 - x_0)r + (x_2 - x_1)rs, y_0 + (y_1 - y_0)r + (y_2 - y_1)rs)$$

を考えると、$\tilde{f}(0,s) = 0$ である。また、自然数 n を 0 の多重度 (Multiplicity) とする。すなわち、

$$\left.\frac{\partial^i \tilde{f}}{\partial r^i}\right|_{r=0} = 0 \quad (i < n)$$
$$\left.\frac{\partial^i \tilde{f}}{\partial r^i}\right|_{r=0} \neq 0 \quad (i = n)$$

を満たすとする。

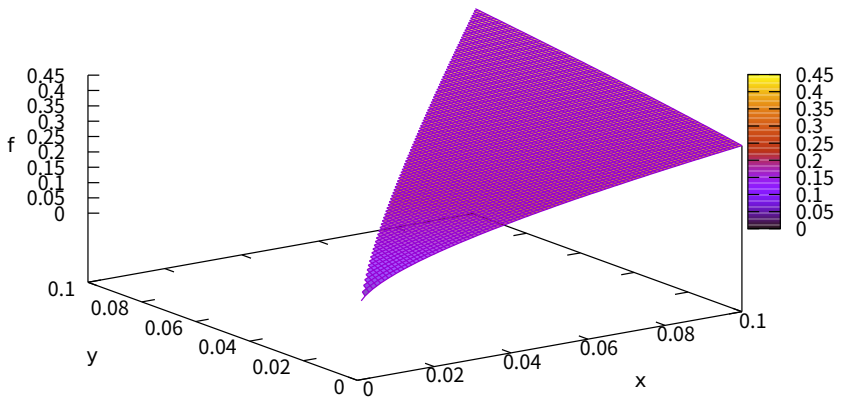
これで、辺の特異性を持つ関数の数値積分に帰着した。

簡単な例題でこの様子を示す。

例 4.1. K を点 $(0,0),(0.1,0),(0.1,0.1)$ からなる三角形とし、

$$\iint_K \sqrt{x+y}\,dxdy$$

を計算することを考える。



これを次のように「特異点を開く」変数変換を行う。

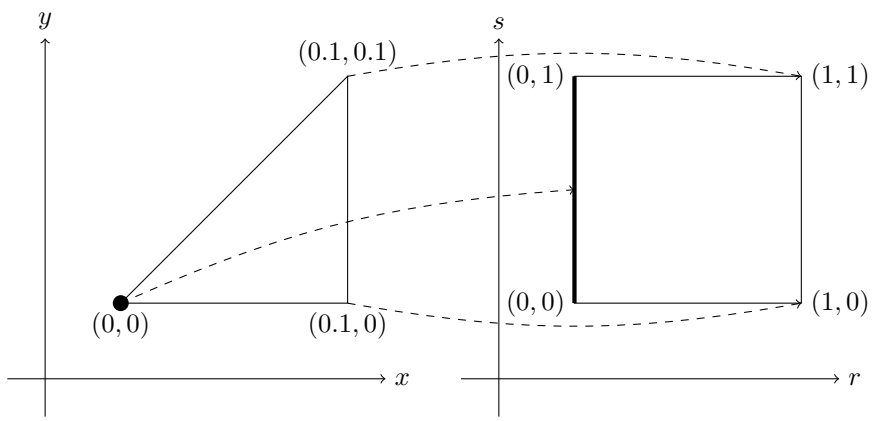
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} rs$$

$$(0 \le r \le 1, \quad 0 \le s \le 1)$$

すなわち、

$$x = 0.1r$$

$$y = 0.1rs$$



この r, s を用いると元の積分は、

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{0.1r + 0.1rs} \begin{vmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1s & 0.1r \end{vmatrix} drds = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{0.1r(1+s)}\, 0.01r\, drds$$

となり、これは辺 $r = 0$ について特異な二重積分である。r に関する多重度は $n_r = 1$。

この手法で積分値を計算すると、

$$\iint_K \sqrt{x+y}\, dxdy =$$
$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{0.1r(1+s)}\, 0.01r\, drds \in [0.0015418651332575329, 0.0015418651333636226]$$

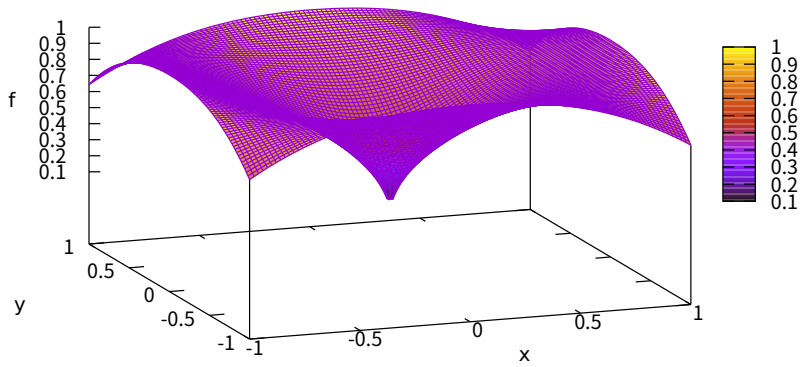
となった。

次に、この節の最初に示した問題を考える。

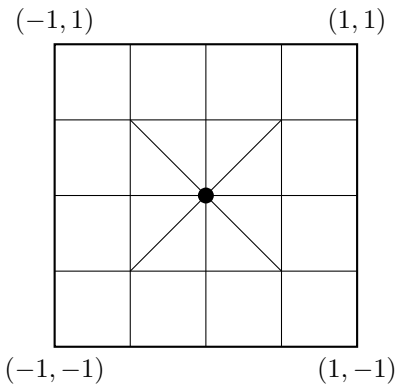
例 4.2.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)^{0.25} \cos(xy) dxdy$$

を計算する。



原点 $(0, 0)$ が特異点なので、頂点が特異点となるような三角形に分割する必要がある。ここでは、



のように分割し、8 個の頂点に特異性のある三角形上の積分と、12 個の特異性のない正方形上の積分の和とした。三角形部分を変数変換すると、r に関する多重度は $n_r = 2$ となることが簡単な計算で分かる。

これにより、

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)^{0.25}\cos(xy)dxdy \in [3.2002894881682673, 3.2003147015185261]$$

と精度保証できた。