(Version: 2015/4/16)

端点に無限大を持つ区間演算まとめ

柏木 雅英 (kashi@waseda.jp)

1 はじめに

上端下端型の区間演算で、端点に ∞ を持てるようにすると、$[0, \infty]$ のような半直線集合を表すことが出来て大変便利である。ところが、きちんと考えると案外複雑なので、まとめておくことにした。

2 ポリシー

区間 $[a, b]$ の端点 a, b は、「$-\infty$ と ∞ を含む IEEE 754 Std. で表現可能な数」とする。ただし、

- $a \le b$ を満たす。
- $[-\infty, -\infty]$ 、$[\infty, \infty]$ は禁止。

とする。このとき、区間 $[a, b]$ の表す集合は、

- $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \le b\}$ (a, b が $\pm\infty$ でない場合)
- $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \le b\}$ ($a = -\infty$ の場合)
- $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x < b\}$ ($b = \infty$ の場合)
- $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$ ($a = -\infty$, $b = \infty$ の場合)

とする。

3 IEEE 754 Std. と無限大

IEEE 754 Std. の無限大に関する演算規則をまとめておく。

$+$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	NaN
$+\infty$	NaN	$+\infty$

$-$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	NaN	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	NaN

$\times$	$-\infty$	-0	$+0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	NaN	NaN	$-\infty$
-0	NaN	$+0$	-0	NaN
$+0$	NaN	-0	$+0$	NaN
$+\infty$	$-\infty$	NaN	NaN	$+\infty$

$\div$	$-\infty$	-0	$+0$	$+\infty$
$-\infty$	NaN	$+\infty$	$-\infty$	NaN
-0	0	NaN	NaN	-0
$+0$	-0	NaN	NaN	$+0$
$+\infty$	NaN	$-\infty$	$+\infty$	NaN

区間演算の実装においては、NaN の発生を考慮する必要がある。

4　加算

$X = [a, b], Y = [c, d]$ とするとき、単に

$$X + Y = [a + c, b + d]$$

でよい。加算では $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ で NaN が発生するが、この組み合わせは決して発生しないはず。

5　減算

$X = [a, b], Y = [c, d]$ とするとき、単に

$$X - Y = [a - d, b - c]$$

でよい。減算では $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ で NaN が発生するが、この組み合わせは決して発生しないはず。

6　乗算

乗算の場合、$0 \times (\pm\infty)$ が NaN になってしまうので、これを避ける必要がある。$X = [a, b], Y = [c, d]$ とするとき、次のように場合分けを行えばよい。

$X \times Y =$

	$c < 0, d \leq 0$	$c < 0, d > 0$	$c \geq 0, d > 0$	$c = d = 0$
$a < 0, b \leq 0$	$[bd, ac]$	$[ad, ac]$	$[ad, bc]$	(A)
$a < 0, b > 0$	$[bc, ac]$	$[\min(ad, bc), \max(ac, bd)]$	$[ad, bd]$	(A)
$a \geq 0, b > 0$	$[bc, ad]$	$[bc, bd]$	$[ac, bd]$	(A)
$a = b = 0$	(B)	(B)	(B)	$[0, 0]$

ただし、(A) は、

- $|a| = \infty$ または $|b| = \infty$ ならば、$[-\infty, \infty]$、そうでなければ $[0, 0]$。

(B) は、

- $|c| = \infty$ または $|d| = \infty$ ならば、$[-\infty, \infty]$、そうでなければ $[0, 0]$。

を返すものとする。

X が点区間 $[a, a]$ の場合は ($|a| \neq \infty$ とする)、

$a < 0$	$[ad, ac]$
$a > 0$	$[ac, ad]$
$a = 0$	(B)

となる。ただし、(B) は

- $|c| = \infty$ または $|d| = \infty$ ならば、$[-\infty, \infty]$、そうでなければ $[0, 0]$。

を返すものとする。

Y が点区間 $[c, c]$ の場合は ($|c| \neq \infty$ とする)、

$c < 0$	$c > 0$	$c = 0$
$[bc, ac]$	$[ac, bc]$	(A)

となる。ただし、(A) は、

- $|a| = \infty$ または $|b| = \infty$ ならば、$[-\infty, \infty]$、そうでなければ $[0, 0]$。

を返すものとする。

7 除算

$X = [a, b], Y = [c, d]$ とするとき、

$X \div Y =$

	$Y < 0$	$Y > 0$
$X < 0$	$[b/c, a/d]$	$[a/c, b/d]$
$X \ni 0$	$[b/d, a/d]$	$[a/c, b/c]$
$X > 0$	$[b/d, a/c]$	$[a/d, b/c]$

とするのが普通である。Y が 0 を含む場合は 0 除算エラー発生と見なす。除算の場合、$(\pm\infty)/(\pm\infty)$ で NaN が発生するが、表を見るとこのような組み合わせは発生しない。

なお、端点に ∞ を許す区間演算では、Y が 0 を含む区間でもエラーにせず ∞ を活用して結果を返した方が便利な場合がある。この場合の除算の表は、次のようになる。

$X \div Y =$

	$Y < 0$	$c < 0, d = 0$	$c < 0, d > 0$	$c = 0, d > 0$	$Y > 0$
$X < 0$	$[b/c, a/d]$	$[b/c, \infty]$	$[-\infty, b/d] \cup [b/c, \infty]$	$[-\infty, b/d]$	$[a/c, b/d]$
$a < 0, b = 0$	$[0, a/d]$	$[0, \infty]$	$[-\infty, \infty]$	$[-\infty, 0]$	$[a/c, 0]$
$a < 0, b > 0$	$[b/d, a/d]$	$[-\infty, \infty]$	$[-\infty, \infty]$	$[-\infty, \infty]$	$[a/c, b/c]$
$a = 0, b > 0$	$[b/d, 0]$	$[-\infty, 0]$	$[-\infty, \infty]$	$[0, \infty]$	$[0, b/c]$
$X > 0$	$[b/d, a/c]$	$[-\infty, a/c]$	$[-\infty, a/c] \cup [a/d, \infty]$	$[a/d, \infty]$	$[a/d, b/c]$
$a = b = 0$	$[0, 0]$	$[0, 0]$	$[0, 0]$	$[0, 0]$	$[0, 0]$

この除算の表でも、∞/∞ は発生せず NaN のケアをする必要はない。

なお、この除算は $X \div (Y \setminus 0)$ を包含する集合を返していると解釈できる。$c = d = 0$ のときは今度こそ 0 除算エラーとする。