(Version: 2015/4/16)

# 端点に無限大を持つ区間演算まとめ

柏木 雅英 (kashi@waseda.jp)

## 1　はじめに

上端下端型の区間演算で、端点に $\infty$ を持てるようにすると、$[0,\infty]$ のような半直線集合を表すことが出来て大変便利である。ところが、きちんと考えると案外複雑なので、まとめておくことにした。

## 2　ポリシー

区間 $[a,b]$ の端点 $a,b$ は、「$-\infty$ と $\infty$ を含む IEEE 754 Std. で表現可能な数」とする。ただし、

- $a \le b$ を満たす。
- $[-\infty,-\infty]$ 、$[\infty,\infty]$ は禁止。

とする。このとき、区間 $[a,b]$ の表す集合は、

- $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \le b\}$ ($a,b$ が $\pm\infty$ でない場合)
- $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \le b\}$ ($a=-\infty$ の場合)
- $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x < b\}$ ($b=\infty$ の場合)
- $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$ ($a=-\infty$, $b=\infty$ の場合)

とする。

## 3　IEEE 754 Std. と無限大

IEEE 754 Std. の無限大に関する演算規則をまとめておく。

| $+$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | $-\infty$ | NaN |
| $+\infty$ | NaN | $+\infty$ |

| $-$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | NaN | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | NaN |

| $\times$ | $-\infty$ | $-0$ | $+0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ | NaN | NaN | $-\infty$ |
| $-0$ | NaN | $+0$ | $-0$ | NaN |
| $+0$ | NaN | $-0$ | $+0$ | NaN |
| $+\infty$ | $-\infty$ | NaN | NaN | $+\infty$ |

| $\div$ | $-\infty$ | $-0$ | $+0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | NaN | $+\infty$ | $-\infty$ | NaN |
| $-0$ | 0 | NaN | NaN | $-0$ |
| $+0$ | $-0$ | NaN | NaN | $+0$ |
| $+\infty$ | NaN | $-\infty$ | $+\infty$ | NaN |

区間演算の実装においては、NaN の発生を考慮する必要がある。

# 4　加算

$X = [a, b], Y = [c, d]$ とするとき、単に

$$X + Y = [a + c, b + d]$$

でよい。加算では $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ で NaN が発生するが、この組み合わせは決して発生しないはず。

# 5　減算

$X = [a, b], Y = [c, d]$ とするとき、単に

$$X - Y = [a - d, b - c]$$

でよい。減算では $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ で NaN が発生するが、この組み合わせは決して発生しないはず。

# 6　乗算

乗算の場合、$0 \times (\pm\infty)$ が NaN になってしまうので、これを避ける必要がある。$X = [a, b], Y = [c, d]$ とするとき、次のように場合分けを行えばよい。

$X \times Y =$

| | $c < 0, d \leq 0$ | $c < 0, d > 0$ | $c \geq 0, d > 0$ | $c = d = 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $a < 0, b \leq 0$ | $[bd, ac]$ | $[ad, ac]$ | $[ad, bc]$ | (A) |
| $a < 0, b > 0$ | $[bc, ac]$ | $[\min(ad, bc), \max(ac, bd)]$ | $[ad, bd]$ | (A) |
| $a \geq 0, b > 0$ | $[bc, ad]$ | $[bc, bd]$ | $[ac, bd]$ | (A) |
| $a = b = 0$ | (B) | (B) | (B) | $[0, 0]$ |

ただし、(A) は、

- $|a| = \infty$ または $|b| = \infty$ ならば、$[-\infty, \infty]$、そうでなければ $[0, 0]$。

(B) は、

- $|c| = \infty$ または $|d| = \infty$ ならば、$[-\infty, \infty]$、そうでなければ $[0, 0]$。

を返すものとする。

$X$ が点区間 $[a, a]$ の場合は ($|a| \neq \infty$ とする)、

| | |
|---|---|
| $a < 0$ | $[ad, ac]$ |
| $a > 0$ | $[ac, ad]$ |
| $a = 0$ | (B) |

となる。ただし、(B) は

- $|c| = \infty$ または $|d| = \infty$ ならば、$[-\infty, \infty]$、そうでなければ $[0, 0]$。

を返すものとする。

$Y$ が点区間 $[c, c]$ の場合は ($|c| \neq \infty$ とする)、

| $c < 0$ | $c > 0$ | $c = 0$ |
|---|---|---|
| $[bc, ac]$ | $[ac, bc]$ | (A) |

となる。ただし、(A) は、

- $|a| = \infty$ または $|b| = \infty$ ならば、$[-\infty, \infty]$、そうでなければ $[0, 0]$。

を返すものとする。

## 7 除算

$X = [a, b], Y = [c, d]$ とするとき、

$X \div Y =$

| | $Y < 0$ | $Y > 0$ |
|---|---|---|
| $X < 0$ | $[b/c, a/d]$ | $[a/c, b/d]$ |
| $X \ni 0$ | $[b/d, a/d]$ | $[a/c, b/c]$ |
| $X > 0$ | $[b/d, a/c]$ | $[a/d, b/c]$ |

とするのが普通である。$Y$ が 0 を含む場合は 0 除算エラー発生と見なす。除算の場合、$(\pm\infty)/(\pm\infty)$ で NaN が発生するが、表を見るとこのような組み合わせは発生しない。

なお、端点に $\infty$ を許す区間演算では、$Y$ が 0 を含む区間でもエラーにせず $\infty$ を活用して結果を返した方が便利な場合がある。この場合の除算の表は、次のようになる。

$X \div Y =$

| | $Y < 0$ | $c < 0, d = 0$ | $c < 0, d > 0$ | $c = 0, d > 0$ | $Y > 0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X < 0$ | $[b/c, a/d]$ | $[b/c, \infty]$ | $[-\infty, b/d] \cup [b/c, \infty]$ | $[-\infty, b/d]$ | $[a/c, b/d]$ |
| $a < 0, b = 0$ | $[0, a/d]$ | $[0, \infty]$ | $[-\infty, \infty]$ | $[-\infty, 0]$ | $[a/c, 0]$ |
| $a < 0, b > 0$ | $[b/d, a/d]$ | $[-\infty, \infty]$ | $[-\infty, \infty]$ | $[-\infty, \infty]$ | $[a/c, b/c]$ |
| $a = 0, b > 0$ | $[b/d, 0]$ | $[-\infty, 0]$ | $[-\infty, \infty]$ | $[0, \infty]$ | $[0, b/c]$ |
| $X > 0$ | $[b/d, a/c]$ | $[-\infty, a/c]$ | $[-\infty, a/c] \cup [a/d, \infty]$ | $[a/d, \infty]$ | $[a/d, b/c]$ |
| $a = b = 0$ | $[0, 0]$ | $[0, 0]$ | $[0, 0]$ | $[0, 0]$ | $[0, 0]$ |

この除算の表でも、$\infty/\infty$ は発生せず NaN のケアをする必要はない。

なお、この除算は $X \div (Y \setminus 0)$ を包含する集合を返していると解釈できる。$c = d = 0$ のときは今度こそ 0 除算エラーとする。