

(Version: 2019/4/8)

## 端点に無限大を持つ区間演算まとめ

柏木 雅英 (kashi@waseda.jp)

### 1 はじめに

上端下端型の区間演算で、端点に  $\infty$  を持てるようにすると、 $[0, \infty]$  のような半直線集合を表すことが出来て大変便利である。ところが、きちんと考えると案外複雑なので、まとめておくことにした。

### 2 ポリシー

区間  $[a, b]$  の端点  $a, b$  は、「 $-\infty$  と  $\infty$  を含む IEEE 754 Std. で表現可能な数」とする。ただし、

- $a \leq b$  を満たす。
- $[-\infty, -\infty]$ 、 $[\infty, \infty]$  は禁止。

とする。このとき、区間  $[a, b]$  の表す集合は、

- $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$  ( $a, b$  が  $\pm\infty$  でない場合)
- $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$  ( $a = -\infty$  の場合)
- $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$  ( $b = \infty$  の場合)
- $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$  ( $a = -\infty, b = \infty$  の場合)

とする。

### 3 IEEE 754 Std. と無限大

IEEE 754 Std. の無限大に関する演算規則をまとめておく。

	$+$	$-\infty$	$+\infty$		$-$	$-\infty$	$+\infty$		
	$-\infty$	$-\infty$	NaN		$-\infty$	NaN	$-\infty$		
	$+\infty$	NaN	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$	NaN		
$\times$	$-\infty$	$-0$	$+0$	$+\infty$	$\div$	$-\infty$	$-0$	$+0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	NaN	NaN	$-\infty$	$-\infty$	NaN	$+\infty$	$-\infty$	NaN
$-0$	NaN	$+0$	$-0$	NaN	$-0$	$0$	NaN	NaN	$-0$
$+0$	NaN	$-0$	$+0$	NaN	$+0$	$-0$	NaN	NaN	$+0$
$+\infty$	$-\infty$	NaN	NaN	$+\infty$	$+\infty$	NaN	$-\infty$	$+\infty$	NaN

区間演算の実装においては、NaN の発生を考慮する必要がある。

## 4 加算

$X = [a, b], Y = [c, d]$  とするとき、単に

$$X + Y = [a + c, b + d]$$

でよい。加算では  $(\pm\infty) + (\mp\infty)$  で NaN が発生するが、この組み合わせは決して発生しないはず。

## 5 減算

$X = [a, b], Y = [c, d]$  とするとき、単に

$$X - Y = [a - d, b - c]$$

でよい。減算では  $(\pm\infty) - (\pm\infty)$  で NaN が発生するが、この組み合わせは決して発生しないはず。

## 6 乗算

乗算の場合、 $0 \times (\pm\infty)$  が NaN になってしまうので、これを避ける必要がある。 $X = [a, b], Y = [c, d]$  とするとき、次のように場合分けを行えばよい。

$X \times Y =$

	$c < 0, d \leq 0$	$c < 0, d > 0$	$c \geq 0, d > 0$	$c = d = 0$
$a < 0, b \leq 0$	$[bd, ac]$	$[ad, ac]$	$[ad, bc]$	$[0, 0]$
$a < 0, b > 0$	$[bc, ac]$	$[\min(ad, bc), \max(ac, bd)]$	$[ad, bd]$	$[0, 0]$
$a \geq 0, b > 0$	$[bc, ad]$	$[bc, bd]$	$[ac, bd]$	$[0, 0]$
$a = b = 0$	$[0, 0]$	$[0, 0]$	$[0, 0]$	$[0, 0]$

## 7 除算

$X = [a, b], Y = [c, d]$  とするとき、

$X \div Y =$

	$Y < 0$	$Y > 0$
$X < 0$	$[b/c, a/d]$	$[a/c, b/d]$
$X \ni 0$	$[b/d, a/d]$	$[a/c, b/c]$
$X > 0$	$[b/d, a/c]$	$[a/d, b/c]$

とするのが普通である。 $Y$  が 0 を含む場合は 0 除算エラー発生と見なす。除算の場合、 $(\pm\infty)/(\pm\infty)$  で NaN が発生するが、表を見るとこのような組み合わせは発生しない。

なお、端点に  $\infty$  を許す区間演算では、 $Y$  が 0 を含む区間でもエラーにせず  $\infty$  を活用して結果を返した方が便利な場合がある。この場合の除算の表は、次のようになる。

$X \div Y =$

	$Y < 0$	$c < 0, d = 0$	$c < 0, d > 0$	$c = 0, d > 0$	$Y > 0$
$X < 0$	$[b/c, a/d]$	$[b/c, \infty]$	$[-\infty, b/d] \cup [b/c, \infty]$	$[-\infty, b/d]$	$[a/c, b/d]$
$a < 0, b = 0$	$[0, a/d]$	$[0, \infty]$	$[-\infty, \infty]$	$[-\infty, 0]$	$[a/c, 0]$
$a < 0, b > 0$	$[b/d, a/d]$	$[-\infty, \infty]$	$[-\infty, \infty]$	$[-\infty, \infty]$	$[a/c, b/c]$
$a = 0, b > 0$	$[b/d, 0]$	$[-\infty, 0]$	$[-\infty, \infty]$	$[0, \infty]$	$[0, b/c]$
$X > 0$	$[b/d, a/c]$	$[-\infty, a/c]$	$[-\infty, a/c] \cup [a/d, \infty]$	$[a/d, \infty]$	$[a/d, b/c]$
$a = b = 0$	$[0, 0]$	$[0, 0]$	$[0, 0]$	$[0, 0]$	$[0, 0]$

この除算の表でも、 $\infty/\infty$  は発生せず NaN のケアをする必要はない。

なお、この除算は  $X \div (Y \setminus 0)$  を包含する集合を返していると解釈できる。 $c = d = 0$  のときは今度こそ 0 除算エラーとする。