(Version: 2015/11/8)

公比が区間であるような等比級数の和

柏木 雅英

1　はじめに

初項 1、公比 r の等比級数

$$a_0 = 1,\ a_1 = r,\ a_2 = r^2,\ \cdots$$

の無限和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ は、$|r| < 1$ であれば $\dfrac{1}{1-r}$ であることは言うまでもないだろう。今、

> 初項 1、公比が区間 $I = [l, u]$、$\max(|l|, |u|) < 1$ のとき、無限級数の和は $\dfrac{1}{1-I}$ と言えるか?

という問題を考える。この文章は少し曖昧で、

- 公比 r は一定。すなわち $a_{i+1} = ra_i$ で、$l \le r \le u$ を満たす。
- 公比は毎回異なる。すなわち、$a_{i+1} = r_i a_i$ で、各 r_i は $l \le r_i \le u$ を満たす。

の二通りに取れるが、後者の意味とする。

この問題を何人かの知り合いに聞いたところ、R 氏、T 氏、M 氏は $\dfrac{1}{1-I}$ で正しいだろうと予想し、S 氏、T 氏は怪しいのではないかと予想した。

自分はある問題 (超幾何関数) の計算法を考えていたときにこの問題に遭遇し、最初は大して気にもせずに $\dfrac{1}{1-I}$ でプログラムを書いてしまったのだが、寝ながら夢の中でふと気になって、翌朝慎重に検討してみたらどうやらそんなに安易に考えてはいけないことに気づいたという次第である。

2　公比が正の場合

公比が非負の場合、すなわち公比 $I = [l, u]$ が $l \ge 0$ を満たす場合は、予想通り $\dfrac{1}{1-I}$ となる。

明らかに、

$$\begin{array}{rcl} 1 \leq & a_0 & \leq 1 \\ l \leq & a_1 & \leq u \\ l^2 \leq & a_2 & \leq u^2 \\ l^3 \leq & a_3 & \leq u^3 \\ & \vdots & \end{array}$$

が成り立つので、

$$\frac{1}{1-l} \leq \sum_{i=0}^{\infty} a_i \leq \frac{1}{1-u}$$

が成り立つ。また、$\dfrac{1}{1-I}$ を区間演算で計算すると、

$$\frac{1}{1-[l,u]} = \frac{1}{[1-u, 1-l]} = [\frac{1}{1-l}, \frac{1}{1-u}]$$

となるので、両者は一致する。

3 公比が負の場合

公比が非負の場合、すなわち公比 $I = [l, u]$ が $u \leq 0$ を満たす場合は、$\dfrac{1}{1-I}$ ではまずく、無限級数の和はこの区間に含まれない場合がある。例えば、公比 $I = [-0.6, -0.4]$ のとき $\dfrac{1}{1-I} = [\dfrac{5}{8}, \dfrac{5}{7}] \simeq [0.625, 0.7143]$ であるが、

$$\begin{array}{rcll} a_{i+1} & = & -0.6a_i & (i \text{ が偶数のとき}) \\ a_{i+1} & = & -0.4a_i & (i \text{ が奇数のとき}) \end{array}$$

と定めると、

$$a_0 = 1, a_1 = -0.6, a_2 = 0.4 \times 0.6, a_3 = -0.4 \times 0.6^2, a_4 = 0.4^2 \times 0.6^2, \ldots$$

となりその無限和はおよそ 0.5263 で、これは先の区間の外にある。

さて、この無限和の取り得る範囲を考察しよう。

$$1 + r_1 + r_2 r_1 + r_3 r_2 r_1 + \cdots = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{i} r_k$$

という目的関数を、$l \leq r_i \leq u$ という制約条件下で最大化/最小化する問題と考える。目的関数の最小値、最大値をそれぞれ P, Q とする。

まず、$P > 0$ を示す。これは、

$$\begin{aligned}
&1 + r_1 + r_2r_1 + r_3r_2r_1 + r_4r_3r_2r_1 + r_5r_4r_3r_2r_1 + \cdots \\
&(1 + r_1) + r_2r_1(1 + r_3) + r_4r_3r_2r_1(1 + r_5) + \cdots
\end{aligned}$$

とすると、$1 + r_i > 0$, また r 偶数個の積は正であることから分かる。

次に、

$$\begin{aligned}
&1 + r_1 + r_2r_1 + r_3r_2r_1 + r_4r_3r_2r_1 + r_5r_4r_3r_2r_1 + \cdots \\
&1 + r_1(1 + r_2 + r_3r_2 + r_4r_3r_2 + r_5r_4r_3r_2 + \cdots)
\end{aligned}$$

と変形すると、括弧内も同じ形の級数なので最小、最大は P, Q であり、$[l, u] < 0$ を考えると

$$[l, u] \times [P, Q] = [lQ, uP]$$

なので

$$\begin{aligned}
1 + lQ &= P \\
1 + uP &= Q
\end{aligned}$$

が成立する。これを解くと、

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1 + l}{1 - lu} \\
Q &= \frac{1 + u}{1 - lu}
\end{aligned}$$

が得られる。

また、これを見ると、公比の列 $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$ について、

- 最小値を達成する列は (l, 最大値を達成する列)
- 最大値を達成する列は (u, 最小値を達成する列)

となることが分かるので、再帰的に代入することによって

- 最小値を達成する列は (l, u, l, u, $\ldots$)
- 最大値を達成する列は (u, l, u, l. $\ldots$)

と交互に上限下限を選択したものとなることが分かる。

4　公比が正負にまたがる場合

公比が正負にまたがる場合、すなわち公比 $I = [l, u]$ が $l \leq 0 \leq u$ を満たす場合を考える。

最小値最大値 P, Q については、$Q > 0$ は明らかだが P は正負両方の可能性がある。そこで、$P \geq 0$ の場合と $P < 0$ の場合に場合分けする。

$P \geq 0$ の場合、前節と同様の変形

$$
\begin{array}{l}
1 + r_1 + r_2 r_1 + r_3 r_2 r_1 + r_4 r_3 r_2 r_1 + r_5 r_4 r_3 r_2 r_1 + \cdots \\
1 + r_1(1 + r_2 + r_3 r_2 + r_4 r_3 r_2 + r_5 r_4 r_3 r_2 + \cdots)
\end{array}
$$

を考えると、

$$[l, u] \times [P, Q] = [lQ, uQ]$$

なので

$$
\begin{aligned}
1 + lQ &= P \\
1 + uQ &= Q
\end{aligned}
$$

が成立する。これを解くと、

$$
\begin{aligned}
P &= 1 + \frac{l}{1-u} \\
Q &= \frac{1}{1-u}
\end{aligned}
$$

が得られる。

$P < 0$ の場合、

$$[l, u] \times [P, Q] = [\min(lQ, uP), \max(lP, uQ)]$$

なので複雑になる。

ここで $lQ > uP$ と仮定すると、$1 + uP = P$ が成立することになるが、これを解くと $P = \dfrac{1}{1-u}$ となりこれは $P < 0$ に反する。よって $lQ \leq uP$ である。

また、$lP > uQ$ と仮定すると、

$$
\begin{aligned}
1 + lQ &= P \\
1 + lP &= Q
\end{aligned}
$$

が成立することになり、これを解くと $P = Q = \dfrac{1}{1-l} > 0$ となりこれも $P < 0$ に反する。よって $lP \leq uQ$ である。

よって、

$$\begin{aligned}1 + lQ &= P \\ 1 + uQ &= Q\end{aligned}$$

が成立するので、$P \geq 0$ の場合と同じ

$$\begin{aligned}P &= 1 + \frac{l}{1-u} \\ Q &= \frac{1}{1-u}\end{aligned}$$

が成立する。

最大最小を達成する公比の列は、

- 最小値を達成する列は (l, 最大値を達成する列)
- 最大値を達成する列は (u, 最大値を達成する列)

となることが分かるので、再帰的に代入することによって

- 最小値を達成する列は (l, u, u, u, $\ldots$)
- 最大値を達成する列は (u, u, u, u. $\ldots$)

となる。

ここまでの結果をまとめておこう。

公比	無限和の範囲	最小値を達成する列	最大値を達成する列
$[l, u] \geq 0$	$[\frac{1}{1-l}, \frac{1}{1-u}]$	$l, l, l, l \ldots$	$u, u, u, u \ldots$
$[l, u] \leq 0$	$[\frac{1+l}{1-lu}, \frac{1+u}{1-lu}]$	$l, u, l, u \ldots$	$u, l, u, l \ldots$
$[l, u] \ni 0$	$[1 + \frac{l}{1-u}, \frac{1}{1-u}]$	$l, u, u, u \ldots$	$u, u, u, u \ldots$

5　公比が複素数の場合

公比を複素数に拡張した場合を考える。実数の場合はベストな最大最小値を得ることが出来たが、複素数ではかなり難しいと思われる。

そこで、多少の過大評価は覚悟の上で、中心半径型の複素数区間を利用して、無限級数の和を包含することを考える。

$a_i, r_i, r \in \mathbb{C}$ とし、$|r_i - r| \leq \varepsilon$ とする。すなわち、公比を中心 r、半径 ε としている。$|r| + \varepsilon < 1$ を仮定する。複素数列 $\{a_i\}$ を

$$\begin{aligned}a_0 &= 1 \\ a_{i+1} &= r_i a_i\end{aligned}$$

で定めたとき、

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} a_i - \frac{1}{1-r}\right|$$

を評価することを考える。

まず、a_i と r^i の差を評価する。$i=1$ から順に書き下してみる。$a_1 = r_0$ なので、

$$|a_1 - r| \leq \varepsilon$$

である。a_2 については、

$$\begin{aligned}
|a_2 - r^2| &= |r_1 r_0 - r^2| \\
&= |(r_1 - r + r)(r_0 - r + r) - r^2| \\
&= |(r_1 - r)(r_0 - r) + (r_1 - r)r + (r_0 - r)r| \\
&\leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon|r|
\end{aligned}$$

である。a_3 についても同様にして、

$$\begin{aligned}
|a_3 - r^3| &= |r_2 r_1 r_0 - r^3| \\
&= |(r_2 - r + r)(r_1 - r + r)(r_0 - r + r) - r^3| \\
&\leq \varepsilon^3 + 3\varepsilon^2|r| + 3\varepsilon|r|^2
\end{aligned}$$

となる。以下同様にすると、

$$|a_i - r^i| \leq (\varepsilon + |r|)^i - |r|^i$$

となることが分かる。よって、

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{\infty} a_i - \frac{1}{1-r}\right| &= \left|\sum_{i=0}^{\infty}(a_i - r^i)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty}\{(\varepsilon + |r|)^i - |r|^i\} \\
&= \frac{1}{1-|r|-\varepsilon} - \frac{1}{1-|r|} \\
&= \frac{\varepsilon}{(1-|r|-\varepsilon)(1-|r|)}
\end{aligned}$$

と評価できた。

6　オマケ: 複素数の式を実数に適用すると?

上の複素の場合の公式は当然そのまま実数にも適用することが出来る。実数の場合は過大評価の無い完全な式を導いているのであまり意味はないが、実数用の公式と比較してみることによって複素数の公式の過大評価の程度が分かる。

$I = [0.4, 0.6]$ の場合を考える。真の区間は

$$[\frac{1}{1-l}, \frac{1}{1-u}] = [\frac{5}{3}, \frac{5}{2}] \simeq [1.6666, 2.5]$$

であるが、複素数用の式だと $r = 0.5, \varepsilon = 0.1$ として

$$\frac{\varepsilon}{(1-|r|-\varepsilon)(1-|r|)} = \frac{0.1}{0.4 \times 0.5} = 0.5$$

となり、中心は $\dfrac{1}{1-r} = 2$ なので、

$$[2-0.5, 2+0.5] = [1.5, 2.5]$$

となる。真の区間より下端が膨らんでしまっていることが分かる。

次に $I = [-0.6, -0.4]$ の場合を考える。真の区間は

$$[\frac{1+l}{1-lu}, \frac{1+u}{1-lu}] = [\frac{0.4}{0.76}, \frac{0.6}{0.76}] \simeq [0.5263, 0.7895]$$

であるが、複素数用の式だと $r = -0.5, \varepsilon = 0.1$ として

$$\frac{\varepsilon}{(1-|r|-\varepsilon)(1-|r|)} = \frac{0.1}{0.4 \times 0.5} = 0.5$$

となり、中心は $\dfrac{1}{1-r} = \dfrac{2}{3}$ なので、

$$[\frac{2}{3}-0.5, \frac{2}{3}+0.5] = [\frac{1}{6}, \frac{7}{6}] \simeq [0.1666, 1.1667]$$

となる。こちらはかなり過大評価してしまっている。

$I = [-0.8, 0.4]$ の場合を考える。真の区間は

$$[1+\frac{l}{1-u}, \frac{1}{1-u}] = [1+\frac{-0.8}{0.6}, \frac{1}{0.6}] = [-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}] \simeq [-0.3334, 1.6667]$$

であるが、複素数用の式だと $r = -0.2, \varepsilon = 0.6$ として

$$\frac{\varepsilon}{(1-|r|-\varepsilon)(1-|r|)} = \frac{0.6}{0.2 \times 0.8} = \frac{15}{4}$$

となり、中心は $\dfrac{1}{1-r} = \dfrac{5}{6}$ なので、

$$[\frac{5}{6}-\frac{15}{4}, \frac{5}{6}+\frac{15}{4}] \simeq [-2.917, 4.584]$$

となる。これも過大評価が大きい。

複素数用の計算式は場合分けが無く単一の式でよい利点はあるが、もう少し高精度なものを作る必要があるだろうか。