(Version: 2015/11/8)

ガウスの超幾何関数の精度保証付き計算メモ

柏木 雅英

1　はじめに

ガウスの超幾何関数の計算方法をメモ。

2　ガウスの超幾何関数

ガウスの超幾何関数 (Gaussian hypergeometric function) は、

$$ {}_2F_1(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} $$

で定義される。ただし、$(q)_n$ はポッホハマー記号 (Pochhammer symbol) で、

$$ (q)_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ q & n = 1 \\ q(q+1)\cdots(q+n-1) & n > 1 \end{cases} $$

である。

3　計算方法 1(没にした)

オイラー型の積分表示

$$ {}_2F_1(a,b,c;z) = \frac{1}{\mathrm{B}(b, c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a} dx $$

を直接計算する。B はベータ関数。0 と 1 はベキ型特異点なので、ベキ型特異点用の精度保証付き数値積分プログラムを使って直接計算する。この積分表示だと、$c > b > 0$ の範囲しか計算できない。

4　計算方法 2

級数を直接計算する方針で。

$$p_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

とおく。

$${}_2F_1(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

である。ここで p_n は、

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_{n+1} &= \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)} z p_n \end{aligned}$$

と書ける。

$$q_n = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}$$

とおく。q_n は $n \to \infty$ で一般に 1 に収束すると考えられるが、$N \le n < \infty$ における q_n の変動範囲を区間評価することを考える。N は $a+N, b+N, c+N, 1+N > 0$ を満たす程度に大きいと仮定し、T を $a+N, b+N, c+N, 1+N \ge T > 0$ を満たす数とする。例えば

$$T = \min(a+N, b+N, c+N, 1+N)$$

とすればよい。ここで、

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{(a+N-T+n-N+T)(b+N-T+n-N+T)}{(c+N-T+n-N+T)(1+N-T+n-N+T)} \\ &= \frac{(\frac{a+N-T}{n-N+T}+1)(\frac{b+N-T}{n-N+T}+1)}{(\frac{c+N-T}{n-N+T}+1)(\frac{1+N-T}{n-N+T}+1)} \end{aligned}$$

と変形し、$n = [N, \infty]$ と区間を代入すると、

$$q_n \in \frac{(\frac{a+N-T}{[T,\infty]}+1)(\frac{b+N-T}{[T,\infty]}+1)}{(\frac{c+N-T}{[T,\infty]}+1)(\frac{1+N-T}{[T,\infty]}+1)}$$

となる。 こうして得た区間を Q_N と書くことにする。

さて、p_{n-1} の項まで加算した時の残り、

$$E_N = \sum_{n=N}^{\infty} p_n$$

を評価することを考える。これは、初項 p_N 、公比 $Q_N z$ の等比級数の和なので、$|Q_N z| < 1$ ならば E_N は

$$E_N \in p_N \frac{1}{1 - Q_N z} \quad (Q_N z \geq 0)$$

と評価できる。なお、級数和がこのように評価できるのは $Q_N z \geq 0$ の場合のみであり、これ以外の負の場合や 0 を含む場合は [1] を参照して欲しい。

これにより打ち切り誤差が評価できるので、区間演算で丸め誤差を考慮しながら級数を計算し、級数を計算する途中で E_N が machine epsilon 程度になったら E_N を加えて終了すれば精度保証付きの計算値が得られる。

複素数対応も考えたい。z を複素数にするだけなら簡単な気もする。

参考文献

[1] 柏木 雅英 : "公比が区間であるような等比級数の和", 個人的メモ.